DOI:10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2018. 04. 011

Degasperis-Procesi 方程的弱适定性*

王健鸣[1]，冯兆永[2]，刘成霞[3]
（1. 广东工业大学应用数学学院，广东 广州 510520；
2. 中山大学数学学院，广东 广州 510275；
3. 南方医科大学口腔医院，广东 广州 510280）

摘 要：研究 Degasperis-Procesi 方程 Cauchy 问题当初值 $u_0 \in H^1(\mathbf{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbf{R})$ 时解的弱适定性。首先运用特征线将 Degasperis-Procesi 方程的 Cauchy 问题转化成一个 ODE 系统，其次利用 ODE 理论证明该 ODE 系统的解存在唯一，最后利用该 ODE 系统与原方程的关系，研究原方程解的存在唯一性，并给出原方程的解对初值的弱连续依赖性。

关键词：Degasperis-Procesi 方程；弱适定性；特征线；弱连续依赖性

中图分类号：O175 **文献标志码：**A **文章编号：**0529－6579（2018）04－0086－06

Weak well-posedness for a Degasperis-Procesi equation

WANG Jianming[1], *FENG Zhaoyong*[2], *LIU Chengxia*[3]
（1. School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China;
2. School of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
3. Stomatological Hospital, Southern Medical University, Guangzhou 510280, China）

Abstract: The weak well-posedness is obtained for the Cauchy problem of the Degasperis-Procesi equation with the initial value $u_0 \in H^1(\mathbf{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbf{R})$. At first, by introducing the characteristics, the Cauchy problem of the Degasperis-Procesi equation is transformed into an ODE system. By using the ODE theory, the local existence and uniqueness of the solution to the ODE system is proved. Finally, the unique solution is investigated for the original equation by the relationship between the original equation and the ODE system, and the weak continuous dependence on initial conditions to the original equation is given.

Key words: Degasperis-Procesi equation; weak well-posedness; characteristics; weak continuous dependence

本文主要研究如下的 Degasperis-Procesi（DP）方程：

$$u_t - u_{txx} + 4uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx}, t > 0, x \in \mathbf{R} \tag{1}$$

当 $t = 0$ 时, u 满足初始条件

$$u(0,x) = u_0(x), x \in \mathbf{R} \tag{2}$$

Degasperis-Procesi 方程和 Camassa-Holm 方程是两个重要的浅水波方程，现如今对于这两个方程已有较为完善的研究结果[1-13]。DP 方程是由 Degasperis 和 Procesi 在研究动力学的非线性浅水波模型时提

* **收稿日期：**2018－02－06
基金项目：国家自然科学基金（11471339）；广东省高校特色创新类项目（2016KTSCX028）；广州市科技计划（201607010144）；广东省医学科研基金（A2018339）；南方医科大学口腔医院科研培育计划（PY2017017）
作者简介：王健鸣（1993 年生），男；**研究方向：**偏微分方程；E-mail：wangjianming861@163. com
通信作者：冯兆永（1977 年生），男；**研究方向：**偏微分方程；E-mail：fzhaoy@mail. sysu. edu. cn

出[4]。随后 Degasperis 等[5]证明了 DP 方程具有双 Hamiltonian 结构，完全可积，并且有尖峰孤立子解。对于 DP 方程，殷朝阳证明了该方程在初值 $u_0 \in H^s(\mathbf{R}), s > 2/3$ 时解的局部适定性[10]，并证明了整体解的存在性和解的爆破现象[11]。Coclite 和 Karlsen 研究了 DP 方程的 Cauchy 问题在初值 $u_0 \in L^2(\mathbf{R}) \cap L^4(\mathbf{R})$ 时弱解的存在性和熵弱解的唯一性[12]。Escher 等[13]研究了 DP 方程强解的爆破率和弱解的整体存在唯一性。本文受文献［14］启发，运用特征线方法将 DP 方程转化成 ODE 系统，再利用 ODE 理论研究该 ODE 系统解的存在唯一性，进而证明 DP 方程当初值 $u_0 \in H^1(\mathbf{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbf{R})$ 时解的局部存在唯一性，并给出方程的解对初值的弱连续依赖性。

令 $m = u - u_{xx}$，方程（1）可写成

$$m_t + m_x u + 3mu_x = 0, t > 0, x \in \mathbf{R} \tag{3}$$

设 $G(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}, x \in \mathbf{R}$，则对任意 $f \in L^2(\mathbf{R})$，有 $(1-\partial_x^2)^{-1}f = G * f$，这里 $*$ 代表卷积。从而式（3）可化为

$$u_t + uu_x = -\partial_x\left(G * \left(\frac{3}{2}u^2\right)\right), t > 0, x \in \mathbf{R} \tag{4}$$

下面给出本文的主要结论：

定理 1　设 $u_0 \in X \equiv H^1(\mathbf{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbf{R})$，则存在函数 $T = T(\|u_0\|_X) > 0$ 和 Cauchy 问题（1）－（2）的唯一解 u，使得 $u \in \mathbf{Z}_T \equiv C([0,T):H^1(\mathbf{R})) \cap L^\infty([0,T):W^{1,\infty}(\mathbf{R})) \cap C^1([0,T):L^2(\mathbf{R}))$，且

$$\sup_{[0,T)}(\|u(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbf{R})} + \|u(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R})}) \leqslant c\|u_0\|_X$$

其中常数 $c > 0$。此外，如果在空间 X 上初值 $u_{01} \to u_{02}$，则在 $H^1([0,T)\times\mathbf{R})$ 上有 $u_1 \to u_2$，其中 u_1, u_2 是 Cauchy 问题（1）－（2）的解。

注 1　根据文献［11］中引理 2.2 和定理 4.1 易知，即使 DP 方程的初值 $\|u_0\|_{H^s(\mathbf{R})}, s > \dfrac{3}{2}$ 非常小（此时，由 Sobolev 嵌入定理知 $\|u_0\|_{H^1(\mathbf{R})} + \|u_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R})}$ 很小），方程的解 u 在短时间内也可能爆破，即当 t 趋于某个较小的时间 T 时，有 $\|u_x(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \to +\infty$，从而 u 在 $W^{1,\infty}(\mathbf{R})$ 上关于初值和时间没有连续依赖性，所以 Cauchy 问题（1）－（2）的解对初值的连续依赖性只在更弱的空间 $H^1([0,T)\times\mathbf{R})$ 中成立。

1　ODE 系统解的存在唯一性

对于 Cauchy 问题（1）－（2）的光滑解，设 $x(s,t)$ 为方程（1）－（2）的特征线，s 为初值，即

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(s,t)}{\mathrm{d}t} = u(x(s,t),t) \\ x(s,0) = s \end{cases} \tag{5}$$

记 $U(s,t) = u(x(s,t),t), W(s,t) = u_x(x(s,t),t)$，令

$$F_1(\xi,U)(s,t) = -\frac{3}{2}\int_{\mathbf{R}} G'(x(s,t)-x(\sigma,t))U^2(\sigma,t)x_s(\sigma,t)\mathrm{d}\sigma \tag{6}$$

$$F_2(\xi,U)(s,t) = -\frac{3}{2}\int_{\mathbf{R}} G(x(s,t)-x(\sigma,t))U^2(\sigma,t)x_s(\sigma,t)\mathrm{d}\sigma \tag{7}$$

考虑 $\xi(s,t) = x(s,t) - s, \forall s \in \mathbf{R}, t > 0$，由方程（5），可得到

$$\frac{\mathrm{d}\xi(s,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(s,t)}{\mathrm{d}t} = u(x(s,t),t) = U(s,t) \tag{8}$$

对于 $U(s,t)$，利用链式法则，结合方程（4）可得

$$\frac{\mathrm{d}U(s,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u(x(s,t),t)}{\mathrm{d}t} = u_t + uu_x = F_1(\xi,U)(s,t) \tag{9}$$

将方程（4）两边对 x 求导，并利用等式 $\partial_x^2 G * f = G * f - f$ 有

$$\frac{\mathrm{d}W(s,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_x(x(s,t),t)}{\mathrm{d}t} = u_{tx} + uu_{xx} = \left(F_2(\xi,U) + \frac{3}{2}U^2 - W^2\right)(s,t) \tag{10}$$

从而得到如下 ODE 系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\xi(s,t)}{\mathrm{d}t} = U(s,t), & t > 0, s \in \mathbf{R} \\ \dfrac{\mathrm{d}U(s,t)}{\mathrm{d}t} = F_1(\xi,U)(s,t), & t > 0, s \in \mathbf{R} \\ \dfrac{\mathrm{d}W(s,t)}{\mathrm{d}t} = \\ \left(F_2(\xi,U) + \dfrac{3}{2}U^2 - W^2\right)(s,t), & t > 0, s \in \mathbf{R} \\ \xi(s,0) = 0, & s \in \mathbf{R} \\ U(s,0) = u_0(s), & s \in \mathbf{R} \\ W(s,0) = u_{0,x}(s), & s \in \mathbf{R} \end{cases} \tag{11}$$

为了书写方便，记 $X = H^1(\mathbf{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbf{R}), Y = L^2(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$。假设 $\operatorname{essinf}\xi_s \geqslant \alpha > -1$，并考虑 $\xi \in O_\alpha = \{\xi \in X : 1 + \operatorname{essinf}\xi > \alpha\}$。为了证明 ODE 系统（11）解的存在唯一性，先证明以下引

理。

引理 1 设 $\mathbf{v}(s,t)=(\xi,U,W)(s,t)\in O_\alpha\times X\times Y$，则映射 $F:O_\alpha\times X\times Y\to X\times X\times Y$ 是局部 Lipschitz 连续的，其中 $F(\mathbf{v}(s,t))=\left(U,F_1(\xi,U),F_2(\xi,U)+\frac{3}{2}U^2-W^2\right)(s,t)$。

证明 由题设知，ODE 系统（11）可写成积分形式

$$\mathbf{v}(\cdot,t)=\mathbf{v}_0(\cdot)+\int_0^t F(\mathbf{v}(\cdot,\tau))\mathrm{d}\tau \tag{12}$$

其中 $\mathbf{v}(\cdot,t)=(\xi,U,W)(\cdot,t)\in O_\alpha\times X\times Y,t\in[0,T)$。对任意 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in O_\alpha\times X\times Y$，设常数 $K>0$，$\|\mathbf{v}_i\|_{X\times X\times Y}\leqslant K$，$i=1,2$，则有

$$\begin{aligned}&\|F(\mathbf{v}_1(s,t))-F(\mathbf{v}_2(s,t))\|_{X\times X\times Y}\leqslant\\&\|U_1-U_2\|_X+\|F_1(\xi_1,U_1)-F_1(\xi_2,U_2)\|_X+\\&\|F_2(\xi_1,U_1)-F_2(\xi_2,U_2)\|_Y+\\&\frac{3}{2}\|U_1^2-U_2^2\|_Y+\|W_1^2-W_2^2\|_Y\leqslant\\&(1+3K)\|U_1-U_2\|_X+2K\|W_1-W_2\|_Y+\\&\|F_1(\xi_1,U_1)-F_1(\xi_2,U_2)\|_Y+\\&\|\partial_sF_1(\xi_1,U_1)-\partial_sF_1(\xi_2,U_2)\|_Y+\\&\|F_2(\xi_1,U_1)-F_2(\xi_2,U_2)\|_Y\end{aligned} \tag{13}$$

对于 F_1，通过插项可得到

$$\begin{aligned}&\|F_1(\xi_1,U_1)-F_1(\xi_2,U_2)\|_Y\leqslant\\&\|F_1(\xi_1,U_1)-F_1(\xi_1,U_2)\|_Y+\\&\|F_1(\xi_1,U_2)-F_1(\xi_2,U_2)\|_Y=\\&\|I_1\|_Y+\|I_2\|_Y\end{aligned}$$

对于特征线（5），由文献［15］知，映射 $s\to x(s,t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是微分同胚的，从而 x 的逆映射存在，设为 ω：$x\to\omega(x,t)$。容易推导出 $(1+\|\xi_s\|_{L^\infty(\mathrm{R})})^{-1}\leqslant\omega_x(x,t)\leqslant(1+\alpha)^{-1}$，且对任意 $r\in[1,\infty]$ 有

$$\|f\circ\omega\|_{L^r(\mathbf{R})}\leqslant\|x_s\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^{1/r}\|f\|_{L^r(\mathbf{R})},\forall f\in L^r(\mathbf{R})$$

其中，x 和 ω 互为逆函数。又由于 $x_s(s,t)=\xi_s(s,t)+1$，通过变量替换并利用 Young's 不等式可得

$$\begin{aligned}&\|I_1\|_Y=\|F_1(\xi_1,U_1)-F_1(\xi_1,U_2)\|_Y=\\&\frac{3}{2}\left\|\int_{\mathbf{R}}\partial_xG(x_1(s,t)-x_1(\sigma,t))\cdot(U_1^2-U_2^2)(\sigma,t)\partial_sx_1(\sigma,t)\mathrm{d}\sigma\right\|_Y\leqslant\\&\frac{3}{2}\|\partial_sx_1\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\left\|\int_{\mathbf{R}}\partial_xG(x_1(s,t)-y)\cdot(U_1^2-U_2^2)(\omega(y,t),t)\omega_x(y,t)\mathrm{d}y\right\|_Y\leqslant\\&\frac{3}{2}\|\partial_sx_1\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|\omega_x\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\cdot\|\partial_xG*(U_1^2\circ\omega-U_2^2\circ\omega)(x_1(s,t),t)\|_Y\leqslant\\&\frac{3}{2}\|\partial_sx_1\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|\omega_x\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\cdot(\|\partial_xG\|_{L^1(\mathbf{R})}\|\partial_sx_1\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^{1/2}\|U_1^2-U_2^2\|_Y)\leqslant\\&C(\alpha,K)\|U_1-U_2\|_Y\end{aligned} \tag{14}$$

这里 $\|\partial_xG\|_{L^1(\mathbf{R})}=1$，且常数 $C(\alpha,K)$ 仅与 α,K 有关。

根据文献［14］的引理 2.15，有

$$\begin{aligned}&|G'(x_1(s)-x_1(\sigma))-G'(x_2(s)-x_2(\sigma))|\leqslant\\&G((1+\alpha)(s-\sigma))\cdot(|\xi_1(s)-\xi_2(s)|+|\xi_1(\sigma)-\xi_2(\sigma)|)\end{aligned}$$

其中，$G(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$。从而对于 I_2，通过插项得到

$$\begin{aligned}&|I_2|=|F_1(\xi_1,U_2)-F_1(\xi_2,U_2)|=\\&\frac{3}{2}\left|\int_{\mathbf{R}}\partial_xG(x_1(s,t)-x_1(\sigma,t))U_2^2(\sigma,t)\partial_sx_1(\sigma,t)\mathrm{d}\sigma-\int_{\mathbf{R}}\partial_xG(x_2(s,t)-x_2(\sigma,t))U_2^2(\sigma,t)\partial_sx_2(\sigma,t)\mathrm{d}\sigma\right|=\\&\frac{3}{2}\left|\int_{\mathbf{R}}\partial_xG(x_1(s,t)-x_1(\sigma,t))U_2^2(\sigma,t)\cdot(\partial_sx_1(\sigma,t)-\partial_sx_2(\sigma,t))\mathrm{d}\sigma+\int_{\mathbf{R}}(\partial_xG(x_1(s,t)-x_1(\sigma,t))-\partial_xG(x_2(s,t)-x_2(\sigma,t)))\cdot U_2^2(\sigma,t)\partial_sx_2(\sigma,t)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\\&\frac{3}{2}\|\partial_sx_1-\partial_sx_2\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\int_{\mathbf{R}}\partial_xG(x_1(s,t)-x_1(\sigma,t))\cdot U_2^2(\sigma,t)\mathrm{d}\sigma+\frac{3}{2}\|\partial_sx_2\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\cdot\\&\int_{\mathbf{R}}G((1+\alpha)(s-\sigma))\cdot(|\xi_1(s)-\xi_2(s)|+|\xi_1(\sigma)-\xi_2(\sigma)|)U_2^2(\sigma,t)\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

类似于 I_1，通过变量替换并应用 Young's 不等式得到

$$\begin{aligned}&\|I_2\|_Y=\|F_1(\xi_1,U_2)-F_1(\xi_2,U_2)\|_Y\leqslant\\&\frac{3}{2}\|\partial_sx_1-\partial_sx_2\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|\omega_x\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\cdot\|\partial_xG*(U_2^2\circ\omega)(x_1(s,t),t)\|_Y+\\&\frac{3}{2}\|\partial_sx_2\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\cdot2\|\xi_1-\xi_2\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|G*U_2^2\|_Y\leqslant\end{aligned}$$

$$\frac{3}{2}\|\partial_s x_1-\partial_s x_2\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|\omega_x\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\cdot$$
$$\|\partial_x G\|_{L^1(\mathbf{R})}(\|\partial_s x_1\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^{1/2}\|U_2^2\|_Y)+$$
$$3\|\partial_s x_2\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|\xi_1-\xi_2\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|G_1\|_{L^1(\mathbf{R})}\|U_2^2\|_Y\leqslant$$
$$C(\alpha,K)(\|\xi_1-\xi_2\|_{L^\infty(\mathbf{R})}+\|\partial_s\xi_1-\partial_s\xi_2\|_{L^\infty(\mathbf{R})})\tag{15}$$

这里 $G_1(x)=G((1+\alpha)x)$，且 $\|G_1\|_{L^1(\mathbf{R})}=\frac{1}{1+\alpha}\|G\|_{L^1(\mathbf{R})}=\frac{1}{1+\alpha}$, $C(\alpha,K)$ 为与 α,K 有关的常数。结合式(14)-(15),可得

$$\|F_1(\xi_1,U_1)-F_1(\xi_2,U_2)\|_Y\leqslant$$
$$C(\alpha,K)(\|\xi_1-\xi_2\|_X+\|U_1-U_2\|_X)\tag{16}$$

由于 $\partial_x^2 G*f=G*f-f$, 有

$$\partial_s F_1(\xi,U)(s,t)=$$
$$\left(F_2(\xi,U)(s,t)+\frac{3}{2}U^2(s,t)\right)x_s(s,t)$$

从而

$$\|\partial_s F_1(\xi_1,U_1)-\partial_s F_1(\xi_2,U_2)\|_Y\leqslant$$
$$\|F_2(\xi_1,U_1)\partial_s x_1-F_2(\xi_2,U_2)\partial_s x_2\|_Y+$$
$$\frac{3}{2}\|U_1^2\partial_s x_1-U_2^2\partial_s x_2\|_Y\leqslant$$
$$\|F_2(\xi_1,U_1)\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|\partial_s x_1-\partial_s x_2\|_Y+$$
$$\|\partial_s x_2\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|F_2(\xi_1,U_1)-F_2(\xi_2,U_2)\|_Y+$$
$$\frac{3}{2}\|U_1^2\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|\partial_s x_1-\partial_s x_2\|_Y+$$
$$\frac{3}{2}\|\partial_s x_2\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|U_1^2-U_2^2\|_Y$$

类似于不等式（16）的推导，可以得到

$$\|\partial_s F_1(\xi_1,U_1)-\partial_s F_1(\xi_2,U_2)\|_Y\leqslant$$
$$C(\alpha,K)(\|\xi_1-\xi_2\|_X+\|U_1-U_2\|_X)\tag{17}$$

对于 F_2, 类似于上述方法，有

$$\|F_2(\xi_1,U_1)-F_2(\xi_2,U_2)\|_Y\leqslant$$
$$C(\alpha,K)(\|\xi_1-\xi_2\|_X+\|U_1-U_2\|_X)\tag{18}$$

所以，将式（16）－（18）代入式（13）得到

$$\|F(\mathbf{v}_1(s,t))-F(\mathbf{v}_2(s,t))\|_{X\times X\times Y}\leqslant$$
$$C(\alpha,K)\|\mathbf{v}_1(s,t)-\mathbf{v}_2(s,t)\|_{X\times X\times Y}\tag{19}$$

其中常数 $C(\alpha,K)$ 仅与 α,K 有关。

由 F 的定义知，$F(0)=0$, 代入式（19）可得 $\|F(\mathbf{v}(s,t))\|_{X\times X\times Y}\leqslant C(\alpha,K)\|\mathbf{v}(s,t)\|_{X\times X\times Y}$

故对任意的 $\mathbf{v}(s,t)\in O_\alpha\times X\times Y$, 有 $F(\mathbf{v}(s,t))\in X\times X\times Y$。所以映射 $F:O_\alpha\times X\times Y\to X\times X\times Y$ 满足局部 Lipschitz 连续，引理得证。

类似于文献［14］定理 3.8 的证明过程，利用引理 1 和 ODE 理论容易推出以下命题。

命题 1　定义 $B(\alpha,K)=\{\mathbf{v}=(\xi,U,W)\in X\times X\times Y:\xi\in O_\alpha,\|\mathbf{v}\|_{X\times X\times Y}\leqslant K\}$。对于任意初值 $\mathbf{v}_0\in B(\alpha,K)$, 存在 $T>0$ 使得 ODE 系统（11）有唯一解 $\mathbf{v}\in C^1([0,T):B(\alpha,K))$。此外，当 $U'_0(s)=W_0(s)(1+\xi'(s))$，有 $\partial_s U(\cdot,t)=W(\cdot,t)(1+\partial_s\xi(\cdot,t))$。

2　DP 方程局部解的存在唯一性

由于 $\xi(s,t)=x(s,t)-s$, 我们定义 $S\xi(x,t)=\omega(x,t)-x,\forall x\in\mathbf{R}$, 其中 x 和 ω 互为逆函数。为了证明 DP 方程解的存在唯一性，先给出下列引理。

引理 2[14]　映射 S 具有下列性质

（i）$S:O_\alpha\to X$, 且

$$\|S\xi\|_X\leqslant C(\alpha,\|\xi_s\|_{L^\infty(\mathbf{R})})\|\xi\|_X$$

（ii）对于任意 $\xi_1,\xi_2\in O_\alpha$, 有

$$\|S\xi_1-S\xi_2\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\leqslant(1+\alpha)^{-1}\|\xi_1-\xi_2\|_{L^\infty(\mathbf{R})},$$
$$\|S\xi_1-S\xi_2\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant$$
$$C(1+\|\partial_s\xi_1\|_{L^\infty(\mathbf{R})}+\|\partial_s\xi_2\|_{L^\infty(\mathbf{R})})^{1/2}\|\xi_1-\xi_2\|_{L^2(\mathbf{R})}$$

（iii）映射 $D_x S:O_\alpha\to L^2(\mathbf{R})$ 是连续的。

引理 3[14]　对于任意 $f\in C([0,T):L^2(\mathbf{R}))$, 映射 $H_f:\xi\to f(\omega,t)$ 从 O_α 到 $L^2(\mathbf{R})$ 一致连续，其中 ω 是 x 的逆函数, $x(s,t)=\xi(s,t)+s,\forall s\in\mathbf{R}$, $t>0$。

下面先证明 DP 方程局部解的存在性。

命题 2　设初值 $u_0\in X$, 则存在函数 $T=T(\|u_0\|_X)>0$ 和 Cauchy 问题（1）－（2）的解 u, 使得 $u\in\mathbf{Z}_T$。

证明　设 $\mathbf{v}=(\xi,U,W)$ 是 ODE 系统（11）的解，由命题 1 知，$\mathbf{v}\in C^1([0,T):X\times X\times Y)$，且 $\|\mathbf{v}\|_{X\times X\times Y}\leqslant K$。定义 $x(s,t)=\xi(s,t)+s$, 由于映射 $s\to x(s,t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是微分同胚的，从而 x 的逆映射 $\omega:x\to\omega(x,t)$ 也是微分同胚的。对于任意的 $x\in\mathbf{R},t\in[0,T)$，令 $u(x,t)=U(\omega(x,t),t)$，则对应有 $U(s,t)=u(x(s,t),t)$。

由于

$$u(x,t)=U(\omega(x,t),t)$$

应用变量替换可得

$$\begin{aligned}\|u(x,t)\|_{L^2(\mathbf{R})}&=\left(\int_{\mathbf{R}}u^2(x,t)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}=\\&\left(\int_{\mathbf{R}}U^2(\omega(x,t),t)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}=\\&\left(\int_{\mathbf{R}}U^2(y,t)x_s(y,t)\,\mathrm{d}y\right)^{1/2}\leqslant\\&\|x_s\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^{1/2}\|U(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant\\&(1+\|\xi_s\|_{L^\infty(\mathbf{R})})^{1/2}\|U(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbf{R})}\end{aligned}\tag{20}$$

所以 $u(\cdot,t)\in L^2(\mathbf{R})$。根据引理2，对任意 $t_1,t_2\in[0,T)$，有

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,t_1)-u(\cdot,t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}=\\&\|U(\omega(\cdot,t_1),t_1)-U(\omega(\cdot,t_2),t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant\\&\|U(\omega(\cdot,t_1),t_1)-U(\omega(\cdot,t_1),t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}+\\&\|U(\omega(\cdot,t_1),t_2)-U(\omega(\cdot,t_2),t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant\\&\|\partial_tU\|_{L^\infty([0,T):L^2(\mathbf{R}))}|t_1-t_2|+\\&\|\partial_sU\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|S\xi(\cdot,t_1)-S\xi(\cdot,t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant\\&C(\alpha,K)(|t_1-t_2|+\|\xi(\cdot,t_1)-\xi(\cdot,t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})})\end{aligned}$$

又 $\xi\in C([0,T):L^2(\mathbf{R}))$，所以 $u\in C([0,T):L^2(\mathbf{R}))$。

由命题1有 $\partial_sU=W(1+\partial_s\xi)=W\partial_sx$，进而 $u_x(x,t)=\partial_sU(\omega(x,t),t)\omega_x(x,t)=W(\omega(x,t),t)$ 类似于式（20）有 $\partial_xu(\cdot,t)\in L^2(\mathbf{R})$。又由于 $W\in C^1([0,T):Y)$，从而有 $\partial_tW\in L^\infty([0,T):Y)$，于是对任意 $t_1,t_2\in[0,T)$，可推出

$$\begin{aligned}&\|\partial_xu(\cdot,t_1)-\partial_xu(\cdot,t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}=\\&\|W(\omega(\cdot,t_1),t_1)-W(\omega(\cdot,t_2),t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant\\&\|W(\omega(\cdot,t_1),t_1)-W(\omega(\cdot,t_1),t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}+\\&\|W(\omega(\cdot,t_1),t_2)-W(\omega(\cdot,t_2),t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant\\&\|\partial_tW\|_{L^\infty([0,T):L^2(\mathbf{R}))}|t_1-t_2|+\\&\|W(\omega(\cdot,t_1),t_2)-W(\omega(\cdot,t_2),t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}\end{aligned}$$

因为

$$W(\cdot,t)\in C([0,T):L^2(\mathbf{R}))$$

由引理3知，当 $\xi(\cdot,t_2)\to\xi(\cdot,t_1)$ 时，

$$\|W(\omega(\cdot,t_1),t_2)-W(\omega(\cdot,t_2),t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}\to0$$

所以，当 $t_2\to t_1$ 时，有

$$\|\partial_xu(\cdot,t_1)-\partial_xu(\cdot,t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}\to0$$

故

$$\partial_xu\in C([0,T):L^2(\mathbf{R}))$$

从而

$$u\in C([0,T):H^1(\mathbf{R}))$$

因为

$$U\in L^\infty([0,T):W^{1,\infty}(\mathbf{R}))$$

容易推出 $u\in L^\infty([0,T):W^{1,\infty}(\mathbf{R}))$。

下面证明 $u\in C^1([0,T):L^2(\mathbf{R}))$。假设 $u(\cdot,t)$ 是方程（4）的解，则有

$$u_t=-uu_x-\frac{3}{2}\partial_xG*u^2$$

从而，对于任意的 $t_1,t_2\in[0,T)$，有

$$\begin{aligned}&\|\partial_tu(\cdot,t_1)-\partial_tu(\cdot,t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant\\&\|u(\cdot,t_1)u_x(\cdot,t_1)-u(\cdot,t_2)u_x(\cdot,t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}+\\&\frac{3}{2}\|\partial_xG*u^2(\cdot,t_1)-\partial_xG*u^2(\cdot,t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant\\&\|u(\cdot,t_1)\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|u_x(\cdot,t_1)-u_x(\cdot,t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}+\\&\|u_x(\cdot,t_2)\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|u(\cdot,t_1)-u(\cdot,t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}+\\&\frac{3}{2}\|G\|_{L^1(\mathbf{R})}\|u^2(\cdot,t_1)-u^2(\cdot,t_2)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant\\&C(K)\|u(\cdot,t_1)-u(\cdot,t_2)\|_{H^1(\mathbf{R})}\end{aligned}$$

又由前面证明可知 $u\in C([0,T):H^1(\mathbf{R}))$，所以 $u\in C^1([0,T):L^2(\mathbf{R}))$，故综上可得 $u\in\mathbf{Z}_T$。

最后，证明 $u(\cdot,t)$ 是方程（4）的解。由链式法则有 $\partial_tU(\omega(x,t),t)=U_s\omega_t+U_t$，又因为 $\omega_t=\omega_xx_t=u\omega_x$ 且 $U_s\omega_x=u_x$，所以 $\partial_tU(\omega(x,t),t)=-uU_s\omega_x+U_t=-uu_x+U_t$。从而 u_t 存在，且 $u_t+uu_x=U_t$。由于 $\mathbf{v}=(\xi,U,W)$ 是 ODE 方程（11）的解，所以 $U_t=F_1(\xi,U)(s,t)$，因此得到

$$u_t+uu_x=-\frac{3}{2}\partial_xG*u^2$$

故 $u(\cdot,t)$ 是方程（4）的解，命题得证。

下面，证明 DP 方程 Cauchy 问题解的唯一性。

命题3 设初值 $u_0\in X$，如果 $u\in\mathbf{Z}_T$ 是 Cauchy 问题（1）－（2）的解，则 u 是唯一的。

证明 由于 $u\in\mathbf{Z}_T$，通过文献［14］中定理3.10的证明，知道 Cauchy 问题

$$\partial_t\xi(s,t)=u(s+\xi(s,t),t),\xi(s,0)=0 \tag{21}$$

有唯一解 $\xi\in C^1([0,T):C(\mathbf{R}))\cap L^\infty([0,T):W^{1,\infty}(\mathbf{R}))$，而且 $\partial_t\xi\in C([0,T):C(\mathbf{R}))\cap L^\infty([0,T):W^{1,\infty}(\mathbf{R}))$。

对于任意 $s\in\mathbf{R},t\in[0,T)$，定义

$$x(s,t)=\xi(s,t)+s,\quad U(s,t)=u(x(s,t),t),$$
$$W(s,t)=u_x(x(s,t),t)$$

因为 u 是 Cauchy 问题（1）－（2）的解，利用链式法则可得

$$\partial_tU(s,t)=u_t+uu_x=F_1(\xi,U)(s,t) \tag{22}$$

上式两边对变量 s 求导，容易推出

$$\begin{aligned}&\partial_t\partial_sU(s,t)=\partial_sF_1(\xi,U)(s,t)=\\&\left(F_2(\xi,U)(s,t)+\frac{3}{2}U^2(s,t)\right)x_s(s,t)\end{aligned}$$

定义 $y(s,t)=\exp\left(\int_0^tW(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)$，则有 $y_t=Wy$。由文献［14］定理3.10的证明可知 $x_s(s,t)=y(s,t)$，于是 $W=\dfrac{y_t}{y}=\dfrac{x_{ts}}{y}=\dfrac{U_s}{y}$。故有

$$\partial_t W(s,t) = \partial_t\left(\frac{U_s}{y}\right) = \frac{yU_{st} - y_t U_s}{y^2} =$$

$$F_2(\xi,U)(s,t) + \frac{3}{2}U^2(s,t) - W^2(s,t) \quad (23)$$

由式（21）－（23）可得 $\mathbf{v}(s,t) = (\xi,U,W)(s,t)$ 是 ODE 方程（11）的解。由命题 1 知方程（11）的解唯一，又因为映射 $s \to x(s,t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上微分同胚，所以 Cauchy 问题（1）－（2）的解 u 也是唯一的，命题 3 得证。

由命题 2－3 知 Cauchy 问题（1）－（2）的解存在唯一。

注 2　定理 1 中 DP 方程的解对初值的弱连续依赖性的证明方法类似于命题 2 的估计过程，这里证明省略。

参考文献：

[1] 关春霞,冯兆永. 弱耗散的 Degasperis-Procesi 方程弱解的存在性[J]. 中山大学学报(自然科学版),2014,53(2):49－54.

GUAN C X, FENG Z Y. The existence of global entropy weak solutions for a weakly dissipative Degasperis-Procesi equation [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2014,53(2):49－54.

[2] 张双虎,冯兆永,杨凯波. 修正 Camassa-Holm 方程的 Cauchy 问题[J]. 中山大学学报(自然科学版),2014,53(4): 8－12.

ZHANG S H, FENG Z Y, YANG K B. The Cauchy problem for the modified Camassa-Holm equation [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2014, 53(4): 8－12.

[3] BRESSAN A, CONSTANTIN A. Global conservative solutions of the Camassa-Holm equation [J]. Arch Ration Mech Anal, 2007, 183(2): 215－239.

[4] DEGASPERIS A, PROCESI M. Asymptotic integrability [J]. Symmetry and Perturbation Theory, 1999: 23－37.

[5] DEGASPERIS A, HOLM D, HONE A. A new integral equation with peakon solutions [J]. Theo Math Phys, 2002, 133: 1463－1474.

[6] COCLITE G M, KARLSEN K H. On the well-posedness of the Degasperis-Procesi equation [J]. J Funct Anal, 2006, 233(1): 60－91.

[7] CONSTANTIN A, IVANOV R. Dressing method for the Degasperis-Procesi equation [J]. Stud Appl Math, 2017, 138(2): 205－226.

[8] HENRY D. Infinite propagation speed for the Degasperis-Procesi equation [J]. J Math Anal Appl, 2005, 311(2): 755－759.

[9] YIN Z. Global solutions to a new integrable equation with peakons [J]. Indiana Univ Math J, 2004, 53(4): 1189－1210.

[10] YIN Z. On the Cauchy problem for an integrable equation with peakon solutions [J]. Illinois J Math, 2003, 47(3): 649－666.

[11] LIU Y, YIN Z. Global existence and blow-up phenomena for the Degasperis-Procesi equation [J]. Commun Math Phys, 2006, 267(3):801－820.

[12] COCLITE G M, HOLDEN H, KARLSEN K H. Well-posedness for a parabolic-elliptic system [J]. Discrete Contin Dyn Systems, 2005, 13(3): 659－682.

[13] ESCHER J, LIU Y, YIN Z. Global weak solutions and blow-up structure for the Degasperis-Procesi equation [J]. J Funct Anal, 2006, 241(2): 457－485.

[14] LINARES F, PONCE G, SIDERIS T C. Properties of solutions to the Camassa-Holm equation on the line in a class containing the peakons [J]. ArXiv,2016,arXiv:1609.06212.

[15] WU S, YIN Z. Blow-up and decay of the solution of the weakly dissipative Degasperis-Procesi equation [J]. Siam J Math Anal, 2008, 40(2):475－490.